## Sermiversusformel und ABC-Tafel

Um die Höhe eines beobachteten Gestirns zu erhalten oder um eine Distanz zwischen zwei geographischen Orten auf einem Großkreis zu erhalten, wendet man den Seitenkosinussatz der sphärischen Trigonometrie an. Man geht dabei von dem nautischen Grunddreieck aus, wobei man die Zenitdistanz berechnet. Aus der Zenitdistanz ergibt sich dann die Höhe, denn es ist $z = 90° - h$.

$$\cos z = \cos b \cos p + \sin b \sin p \cos t$$
$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t.$$

Hierin setzt man cos t nach der Formel $\cos \alpha = 1 - 2 \text{ sem } \alpha$. Sie kann gleichzeitig als Definitionsgleichung für die Funktion Semiversus $\alpha$ (sem $\alpha$) aufgefaßt werden.

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta(1\text{-}2 \text{ sem } t).$$

Wegen $\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta = \cos (\varphi - \delta)$ ergibt sich

$$\cos z = \cos (\varphi - \delta) - 2 \cos \varphi \cos \delta \text{ sem } t).$$

$\varphi - \delta$ ist gleich der Meridian-Zenitdistanz des Gestirns $z_0$.
Ferner ist cos z und cos $z_0$ durch die Semiversusfunktion zu ersetzen.

$$1 - 2 \text{ sem } z = 1 - 2 \text{ sem } z_0 - 2 \cos \varphi \cos \delta \text{ sem } t,$$

also ist $$\text{sem } z = \text{sem } z_0 + \cos \varphi \cos \delta \text{ sem } t.$$

Das Produkt $\cos \varphi \cos \delta$ sem t ist stets kleiner als 1, da jeder einzelne Faktor kleiner oder höchsten gleich 1 ist und mindestens einer der Faktoren immer kleiner als 1 ist, auch ist das Produkt stets größer oder gleich Null, da keiner der Faktoren negativ wird.

Folglich gibt es einen Hilfswinkel *y*, für den gilt

$$\text{sem } y = \cos \varphi \cos \delta \text{ sem } t.$$

Damit läßt sich die Rechnung nach obiger Formel wie folgt durchführen:
Zunächst sieht man aus der Beziehung

$$\text{sem } z = \text{sem } z_0 + \cos \varphi \cos \delta \text{ sem } t,$$

daß die auf ihr aufgebaute Höhentafel die Logarithmen der Funktionen cos $\alpha$ und sem $\alpha$ soweit die natürlichen Werte der Funktion sem $\alpha$ enthalten muß. Wegen der eben angestellten Überlegung kommt man damit aus, denn man kann den natürlichen Wert lg ($\cos \varphi \cos \delta$ sem t) unter den natürlichen Werten der Semiversusfunktion finden und benötigt nicht die Tafel der Logarithmen der Zahlen dazu. Es ist dann

$$\text{sem } z = \text{sem } z_0 + \text{sem } y$$

Will man die Distanz auf einem Großkreis zwischen zwei bekannten geographischen Orten benutzen, muß man die Glieder der Semiversusformel

$$\text{sem } z = \text{sem } z_0 + \cos \varphi \cos \delta \text{ sem } t$$

ersetzen durch $z_0$ durch $\Delta\varphi$
$\varphi$ durch $\varphi_A$
$\delta$ durch $\varphi_B$
t durch l

die Sermiversusformel für die Distanzberechnung lautet dann:

$$\text{sem } d = \text{sem } \Delta\varphi + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \text{ sem } l.$$

Die Distanz bzw. Höhenberechnung unter Verwendung der Semiversusformel wurde vielfach noch bis in den sechziger Jahren unseres Jahrhunderts angewendet. Heute gibt es Tafelwerke und Rechenprogramme, die weitgehend die Anwendung der Semiversusformel und die daraus resultierende logarithmische Berechnung des Ergebnisses ausschließen. Da jedoch die logarithmische Berechnungsmethode zur Berechnung der astronomischen Höhe bzw. der orthodromen Distanz an Ausbildungsstätten noch teilweise in Gebrauch ist, soll die logarithmische Rechnung abgeleitet werden.

Das Logarithmieren (griech. *arithmos*, Zahl) ist die *zweite Umkehrung des Potenzierens*, durch die bei bekannten Potenzwert und bekannter Basis der Exponent gesucht wird:

| Potenzieren | Radizieren | Logarithmieren . |
|---|---|---|
| $5^2 = 25$ | $\sqrt{25} = 5$ | $2 = {}^5\log 25$ |
| $a^n = b$ | $\sqrt[n]{b} = a$ | $n = {}^a\log b$ |

Dabei werden, um das Auftreten komplexer Werte zu vermeiden, die gegeben Werte a und b als positive reelle Zahlen vorausgesetzt.
Der gesuchte Exponent n ($^2$) heißt Logarithmus (man sagt: n ist der a-Logarithmus von b oder n ist der Logarithmus von b zur Basis a; 2 ist der Fünfer-Logarithmus von 25, a heißt Basis oder Grundzahl des jeweiligen Systems, b heißt Logarithmand oder Numerus. Der Logarithmus der Zahl b zur Basis a ist also die Zahl $n = {}^a\log b$, mit der die Basis potenziert werden muß, um den Numerus zur erhalten: $a^n = b$. Dabei ist n durch a und b eindeutig festgelegt.

da die Logarithmen *Exponenten einer Potenz* sind, gelten für sie dieselben Rechenvorschriften wie für diese. Demnach werden 2 Zahlen miteinander **multipliziert**, indem man ihre Logarithmen **addiert**; sie werden **dividiert**, indem man ihre Logarithmen **subtrahiert** usw. So ermöglichen die Logarithmen *ein um eine Stufe vereinfachtes Rechnen*:

Aus Multiplizieren wird Addieren, aus Potenzieren wird Multiplizieren,
aus Dividieren wird Subtrahieren, aus Radizieren wird Dividieren.

$${}^a\log (u\, v) = {}^a\log u + {}^a\log v \qquad {}^a\log u^n = n \cdot {}^a\log u$$
$${}^a\log (u : v) = {}^a\log u - {}^a\log v \qquad {}^a\log \sqrt[n]{a} = 1/n\; {}^a\log u$$

Da man aber im allgemeinen nur Potenzen mit gleicher Basis in einfacher Weise durch Rechenvorgänge verbinden kann, muß man zuerst die *Form* aller Zahlen ändern, indem man die als Potenzen mit gleicher Basis ausdrückt und so ein einheitliches Logarithmensystem aufbaut. Der Wert der Zahlen bleibt dabei unverändert.

Aus den unendlich vielen möglichen Systemen wurden für den praktischen Gebrauch gewählt:
**1.** Die *Briggsschen Logarithmen* mit der Basis 10 (so genannt nach ihrem Erfinder Henry Briggs, 1556-1630), auch dekadische Logarithmen, Zeichen lg.
**2.** Die *natürlichen Logarithmen* mit der Basis e = 2,718...(nach dem Erfinder auch Napiersche Logarithmen genannt), Zeichen ln.
Die natürlichen Logarithmen werden besonders in der höheren Mathematik verwendet. Für die Briggsschen Logarithmen gilt:

| | | |
|---|---|---|
| Lg 1 | = 0,00000; | denn $1 = 10^0$ |
| Lg 2 | = 0,30103; | denn $2 = 10^{0,30103}$ |
| Lg 3 | = 0,47712; | denn $3 = 10^{0,47712}$ |
| Lg 4 | = 0,60206; | denn $4 = 10^{0,60206}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lg 5 | = 0,69897; | denn 5 = $10^{0,6989}$ | |
| Lg 6 | = 0,77815; | denn 6 = $10^{0,77815}$ | |
| Lg 7 | = 0,85098; | denn 7 = $10^{0,85098}$ | |
| Lg 8 | = 0,93089; | denn 8 = $10^{0,93089}$ | |
| Lg 9 | = 0,95424; | denn 9 = $10^{0,95424}$ | |
| Lg 10 | = 1; | denn 10 | = $10^{1}$ |
| Lg 11 | = 1, 04139; | denn 11 | = $10^{1,04139}$ |
| Lg 12 | = 1,07918; | denn 12 | = $10^{1,07918}$ usw. |
| lg 100 | = 2; | denn 100 | = $10^{2}$ |
| lg 1000 | = 3; | denn 1000 | = $10^{3}$ |
| lg 10000 | = 4; | denn 10000 | = $10^{4}$ usw. |

Beispiel zur Errechnung des Logarithmus von 3

lg 3 = 0,47712

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| das ist 0,47712 | = 4/10 | + 7/100 | + 7/1000 | +1/10 000 | + 2/100 000 |
| | = 0,4 | + 0,07 | + 0,007 | + 0,0001 | + 0,00002 |

Logarithmustafeln enthalten je nach ihrer Stellenzahl die Logarithmen aller drei-, vier- oder mehrstelligen Zahlen (siehe Nautische Tafel). Das eigentliche Logarithmieren, d. h. das Berechnen der Logarithmen, bleibt uns dadurch erspart. Nur die Logarithmen von 10 und allen Potenzen von 10 (100, 1000 usw.) auch 0,1; 0,01 usw.) sind ganze (positive oder negative) Zahlen; der Logarithmus der Zahl 1 ist Null. Alle anderen Logarithmen sind unendliche nichtperiodische Dezimalbrüche, also irrationale Zahlen, die je nach der Stellenzahl der Logarithmentafel durch vier- oder mehrstellige (endliche) Dezimalbrüche approximiert werden, z. B. $\lg 3 = 0{,}47712... \approx 0{,}4771$. In den gebräuchlichen Logarithmustafeln ist die Anzahl der Stellen nach dem Komma meist auf vier oder fünf, seltener auf 6 oder 7 begrenzt. Danach unterscheiden wir vier-, fünf-, sechs- und siebenstellige Logarithmustafeln.
Aus den Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10 kann man die Logarithmen sämtlicher anderer Zahlen ableiten; z. B. ist $\lg 30 = \lg (3 \cdot 19) = \lg 3 + \lg 10 = 1,\ 47712...$Dabei sind die Logarithmen von echten Brüchen negativ, da diese Brüche als ganze Zahlen mit negativen Exponenten aufgefaßt werden können.

*Erläuterung:* Die Logarithmen werden durch endliche Dezimalbrüche angenähert:

$$\lg 3 \approx 0{,}47712;$$
$$\lg 567 \approx 2{,}75358.$$

Die Ziffer vor dem Komma heißt *Kennziffer* oder Charakteristik. Der Ziffernausdruck nach dem Komma heißt *Matisse* (lat. *mantissa*, Ergänzung).
Nur die Mantisse ist in den Logarithmentafeln enthalten; sie ist durch die Ziffernfolge der zu logarithmierenden Zahl ohne Rücksicht auf den Stellenwert bestimmt. Die Kennziffer ist von uns nach folgender Überlegung festzulegen:
Bekannt sind die Kennziffern für 1, 10, 100, 1000 usw. Diese Zehnerpotenzen haben die einzigen ganzzahligen (und gleichzeitig positiven!) Logarithmen des Briggsschen Systems; bei ihnen sind also Kennziffer und Logarithmus identisch. Entsprechend gilt auch für die Kehrwerte der Zehnerpotenzen, deren Kennziffer (Logarithmen) negative ganze Zahlen sind:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Zahlen: | 1,..... | 10,..... | 100,..... | 1000,..... |
| Logarithmen: | 0,..... | 1,..... | 2,..... | 3,..... |

Liegen nun Zahlen zwischen den angegeben, so müssen ihre Logarithmen zwischen den darunterstehenden Werten liegen. Es gilt also die Regel:
Die Kennziffer (in den Tabellen nicht angegeben!) ist immer um 1 kleiner als die Stellen(an)zahl des Numerus vor dem Komma. Bei echten Dezimalbrüchen ist sie negativ; und zwar dem Betrage nach gleich der Anzahl der Nullen, mit denen der Dezimalbruch beginnt; dabei ist die Einernull mitzuzählen:

$$\lg 1{,}2 = 0{,}07918$$
$$\lg 12 = \lg (10 \cdot 1{,}2) = \lg 10 + \lg 1{,}2 = 1 + 0{,}07918 = 1{,}07918$$
$$\lg 120 = \lg (100 \cdot 1{,}2) = \lg 100 + \lg 1{,}2 = 2 + 0{,}07918 = 2{,}07918$$
$$\lg 0{,}12 = \lg (1{,}2 : 10) = \lg 1{,}2 - \lg 10 = 0{,}07918 - 1$$
$$\lg 0{,}012 = \lg (1{,}2 : 100) = \lg 1{,}2 - \lg 100 = 0{,}07918 - 2$$

Der Numerus steht auf den Seiten einer Logarithmentafel in der ersten Spalte von links; rechts davon sind die Mantissen abzulesen. Das Rechnen mit Hilfe der Logarithmentafeln besteht aus drei Rechenvorgängen:

1. Aufsuchen der Logarithmen, d. h. Verwandeln der ursprünglich gegebenen Zahlen (der Numeri) in ihnen gleichwertige Potenzen.
2. Rechen mit den Logarithmen, d. h. mit den Exponenten dieser Potenzen.
3. Aufsuchen des Numerus des Ergebnisses, d. h. der Rückverwandlung des Rechenergebnisses aus der Form der Potenz in die ihr gleichwertige gesuchte Zahl.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Aufgabe: | $72210 \cdot 0{,}0823$ | | |
| Lösung: | lg 72210 | = | 4,85860 |
| | + lg 0,08203 | = | 0,91397 - 2 |
| | | = | 3,77257 |
| | | = | lg 5923 . |

Ergebnis: $72210 \cdot 0{,}08203 = \underline{\underline{5923}}$

Bequemer und daher im praktischen Rechnen gebräuchlicher ist die Schreibweise, daß man das Zeichen lg wegläßt und grundsätzlich festlegt, daß links die Numeri und rechts die Logarithmen stehen:

| | (Numeri) | lg | oder unter Berücksichtigung des Stellenwertes geschrieben: | |
|---|---|---|---|---|
| | 72210 | 4,85860 | 72210 | 4,85860 |
| (mal) | 0,08203 | (+)$\underline{0{,}91397 - 2}$ | 0,08203 | $\underline{0{,}91397 - 2}$ |
| ( = ) | 5923 | 3,77257 | 5923 | 3,77257 |