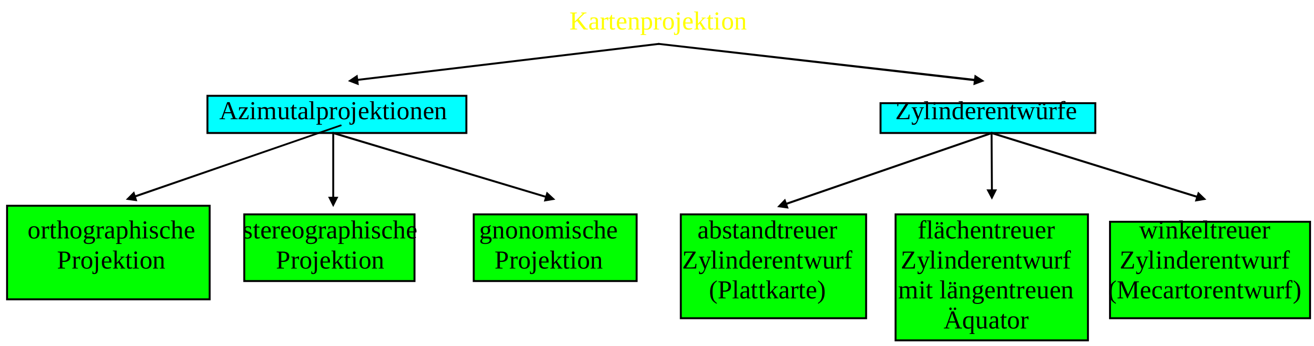
## Grundsätze der Kartographie

Um die Erdoberfläche für die u. a. navigatorische Nutzung darzustellen, macht es sich erforderlich, mit den Grundlagen der Kartographie vertraut zu sein. Der Globus (lat. Kugel) und die Karte geben die Lage-, Flächen- und Raumverhältnisse der Erdoberfläche verkleinert, verallgemeinert und erläutert wieder, und zwar so, daß die geographischen Tatsachen ablesbar und messbar werden.
Das Maß der Verkleinerung wird durch den Maßstab angegeben. So lassen sich verschiedene Maßstäbe wählen, z. B. für eine Weltkarte 1 : 1 000 000, das entspricht 1 cm auf der Karte : 10 km in der Natur bzw. 1 km in der Natur : 1 mm in der Karte. Der Kartenmaßstab gibt somit das Verhältnis an, in dem die Längen auf der Karte zu denen in der Natur stehen. Die Meridiane und Breitenparallele bilden das Kartennetz. Dieses Netz ist das auf eine Ebene übertragene (projekzierte) Globusnetz. Die Netzübertragung bezeichnet man daher als Projektion. Es gibt keine Projektion ohne Verzerrung des Globusnetzes Die Karte kann daher niemals dem Globusnetz ähnlich werden. Sie entweder winkeltreu oder flächentreu, sie ist niemals längentreu, sondern höchstens mittelabstandstreu, d. h. längentreu auf den durch den Mittelpunkt der Karte laufenden Großkreisen.. Entsprechend den verschiedenen Bedürfnissen werden zahlreiche Projektionen unterschieden.




Da für die Bedürfnisse der Navigation, hier mit dem Ziel

1. den Kurswinkel zwischen zwei Positionen in der Karte in der gleichen Größe wie auf der Erdkugel erscheinen zu lassen;
2. die Richtungen zwischen zwei Positionen als Loxodrome in einer geraden Linie zeigen zu können und
3. die Distanzen zwischen zwei Positionen abgreifen zu können,

die winkeltreue Mecartorprojektion ist dazu am besten geeignet. Sie soll eingehend erleutert werden.

### Grundlagen der Mercartorprojektion

Um den Mercartorentwurf (nach Gerhard Kramer, genannt Mecartor, Kartograph, 1512 bis 1594) kontruieren zu können, muss man sich mit den Kontruktionsgesetzen den Zylinderentwurf kennen, aus dem die Mercartorprojektion hervorgeht. Es ist die schon im Mittelalter verwandte Plattkarte (Zylinderentwurf mit längentreuen Äquator).

Ummantelt man den Erdglobus mit einem Zylinder, so dass dieser senkrecht um den Globus zur Äquatorebene steht, wobei er der Äquatorebene berührt und die Erdachse gleichzeitig die Mittelachse dieses Zylinders darstellt, kann man die Punkte (P) der Erdoberfläche so abbilden, dass der sphärische Abstand eines Punktes auf der Erde vom Äquator gleich dem Abstand des Bildpunktes vom Äquator auf der Innenseite des Zylinders ist. Schneidet man nun den Zylinder längs seiner Mantellinie auf und wickelt ihn zu einer Fläche ab, so erhält man eine Karte, die eine Breite vom Betrage des

Äquatorumfangs 2 $\pi$ r (r ist der Erdradius) und eine Höhe von vom Betrage des halben Äquatorumfangs $\pi$ r hat. Das Kartennetz besteht aus lauter quadratischen Netzmaschen. Es besteht Längentreue, da diese Karte in der Nord-Südrichtung keine Verzerrung aufweist (Verzerrung Nord-Süd = $\mu_{NS}$ = 1). Da nun jeder Breitenparallel dieselbe Länge wie der Äquator besitzt, jedoch aus der Abbildung der Breitenparallele auf der Kugel bekannt ist, dass Radien der einzelnen Breitenparallelen mit zunehmender Breite um den Kosinus der Breite abnehmen, muss eine Ost-West Verzerrung dagegen gesetzt werden.. Man erhält die Ost-West Verzerrung, in dem man die Länge eines Breitenparallels in der Karte 2 $\pi$ r durch die Länge des Breitenparallels auf der Erdoberfläche dividiert. Diese Länge ergibt sich aus dem Äquatorumfang, multipliziert mit dem Kosinus der Breite, U = 2 $\pi$ r cos $\varphi$, somit lautet die Beziehung für die Ost-West Verzerrung:

$$\text{Verzerrung Ost-West} = \nu_{EW} = (2\pi r) : (2\pi r \cos\varphi)$$

$$\nu_{EW} = 1 : \cos\varphi \qquad (20)$$

Diese Karte kann nicht winkeltreu sein, da die Verzerrung NS eine andere ist, wie die Verzerrung EW, Lediglich für den Äquator ist Winkeltreue gegeben, da für $\varphi$ = 00° die Verzerrung 1 : cos $\varphi$ gilt. Distanzen in der Nord-Südrichtung nimmt man deshalb immer am Äquator ab, während Distanzen in Ost-Westrichtung auf den verschiedeneren Breiten (außer 00°) einen anderen Maßstab erfordern, und zwar müssen wegen der Abweitung für $x$ Seemeilen $x \times \sec\varphi$ Äquatorminuten entnommen werden. Für beliebige Kurse gelten somit unterschiedliche Maßstäbe. Die Loxodrome ist somit in der Plattkarte keine gerade Linie, zudem wächst die Verzerrung Ost-West mit zunehmender Breite. In hohen Breiten ist stellt sich ein rundes Gebiet in der Ost-West Ausdehnung oval dar, denn nur die Breitenausdehnung stimmt mit der Realität auf der Erdkugel überein. Somit ist eine Flächentreue auch nicht gegeben.
Um von der Plattkarte zur Mercartorkarte zu kommen, bildet man die Meridiane zuerst nach den Abbildungsgesetzen der Plattkarte ab.

Für den erdachsigen Entwurf gilt:

$x$ Abstand des Meridians der Länge $\lambda$ vom Greenwicher Meridian

$x = r \times \lambda$ — $y$ Abstand des Breitenparallels der $\varphi$ vom Äquator

$y = r \times \varphi$ — $\lambda$ und $\varphi$ sind im Bogenmaß anzugeben

Um das Gradmaß in Bogenmaß umzurechnen, gilt:
Das Bogenmaß eines Winkels ist die Maßzahl der Länge des zum Winkel $\alpha$ gehörenden Bogens auf einem Kreis mit Radius r =1 oder das Verhältnis der Bogenlänge zur Länge des Kreisradius. Wird dieses Maß mit arc $\alpha$ (lat. *arcus*, Bogen) bezeichnet, so gilt:

$$\text{arc } 360° = 2\pi,\ \text{arc } \alpha° = \frac{2\pi\ \alpha°}{360°} = \frac{\pi\ \alpha°}{180°} = \frac{\pi\ \alpha'}{180° \times 60'} = \frac{\pi\ \ \alpha''}{180° \times 3600''}. \qquad (21)$$

Im Vermessungswesen ist es wichtig, den Winkel $\zeta$ zu kennen, dessen Bogenmaß 1 ist:

$$\text{arc } \zeta = 1 = \frac{\pi}{\quad} \times \zeta° \text{ und danach}$$

$$\zeta^\circ = \frac{180}{\pi} = 57^\circ\ 17'\ 44{,}8'' \text{ oder}$$

$$\zeta'' = \frac{180^\circ \times 3600''}{\pi} = 206264{,}81'' = 57^\circ\ 17'\ 44{,}8''$$

arc 1’ = 0,000290888

Hat man nun die Meridiane nach den Abbildungsgesetzen der Plattkarte kontruiert, gilt es die mathematische Beziehung für die Verzerrung Ost-West zu finden, so daß ein ausgewählter Kurs (die Loxodrome) alle Meridiane unter einem gleichen Winkel schneiden kann. Das heißt, soll winkeltreue erreicht werden, muß die Verzerrung in einem Gebiet zu zwei senkrecht zueinander stehenden Richtungen gleich sein. Die Verzerrung Ost-West ist 1 **:** cos φ. Die mathematische Beziehung für die Verzerrung Nord-Süd muß nun so lauten, daß sie ebenfalls 1 **:** cos φ entspricht. Folglich muß man eine Integrationskonstante
$y = r \times f(\varphi)$ finden, die dieser Bedingung gerecht wird.
Die Funktion $f(\varphi)$ lautet:

$$f(\varphi) = \text{In} \tan \left( {}^{\pi}/_{4} + {}^{\varphi}/_{2} \right)$$

Da sich diese Integrationskontante dadurch bestimmt, daß für φ = 0 auch $y = r \times f(\varphi)$ gleich 0 sein muß, drückt man r in diesen Einheiten aus. Nur dadurch kann der Äquator auf der *x*-Achse abgebildet werden.

Folglich gilt:

$$y = r \text{ In} \tan \left( {}^{\pi}/_{4} + {}^{\varphi}/_{2} \right)$$

oder

$$y = \frac{r}{0{,}4342954} \lg \tan \left( {}^{\pi}/_{4} + {}^{\varphi}/_{2} \right).$$

Um *y* in Seemeilen des Äquatormaßstabes zu erhalten, drückt man R in diesen Einheiten aus.

1 Äquatorseemeile = r x arc 1’

oder

$$r = \frac{1}{\text{arc } 1'} = 3437{,}7468 \text{ Seemeilen des Äquatormaßstabes}$$

So wird

$$y = \frac{3437{,}7468}{0{,}4342945} \times \lg\tan\left({}^{\pi}/_{4} + {}^{\varphi}/_{2}\right).$$

$$y = 7915{,}7045 \times \lg\tan\left({}^{\pi}/_{4} + {}^{\varphi}/_{2}\right).$$

oder

$$\phi = 7915{,}7045 \times \lg\tan\left(45° + {}^{\varphi}/_{2}\right). \qquad (22)$$

Nach der letzen mathematischen Beziehung werden die Meridionalanteile oder bzw. wird die vergrößerte Breite (ϕ) berechnet.

| φ | Meridionalteile oder vergrößerte Breite | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0° | 1° | 2° | 3° | 4° | 5° | 6° | 7° | 8° | 9° |
| 00° | 0,0 | 60,0 | 120,0 | 180,1 | 240,2 | 300,4 | 360,7 | 421,0 | 481,6 | 542,2 |
| 10° | 603,1 | 664,1 | 725,3 | 786,8 | 848,5 | 910,5 | 972,7 | 1035,3 | 1098,2 | 1161,5 |
| 20° | 1225,1 | 1289,2 | 1353,7 | 1418,6 | 1484,1 | 1550,0 | 1616,5 | 1683,5 | 1751,2 | 1819,4 |
| 30° | 1888,4 | 1958,0 | 2028,4 | 2099,5 | 2171,5 | 2244,3 | 2318,0 | 2392,6 | 2468,3 | 2544,9 |
| 40° | 2622,7 | 2701,6 | 2781,7 | 2863,1 | 2945,8 | 3029,9 | 3115,5 | 3202,7 | 3291,5 | 3382,1 |
| 50° | 3474,5 | 3568,8 | 3665,2 | 3763,8 | 3864,6 | 3968,0 | 4073,9 | 4182,6 | 4294,3 | 4409,1 |
| 60° | 4527,4 | 4649,2 | 4775,0 | 4904,9 | 5039,4 | 5178,8 | 5323,5 | 5474,0 | 5630,8 | 5794,6 |
| 70° | 5965,9 | 6145,7 | 6334,8 | 6534,4 | 6745,7 | 6970,3 | 7210,1 | 7467,2 | 7744,6 | 8045,7 |
| 80° | 8375 | 8739 | 9145 | 9606 | 10137 | 10765 | 11533 | 12522 | 13916 | 16300 |
| 90° | ∞ | | | | | | | | | |

Erläuterung: 15° entsprechen 910,5'...
05° entsprechen 300,4'...
usw.

Die angebenden Werte bedeuten den Abstand vom Äquator, in dem ein Breitenparallel in die Mecartorkarte eingezeichnet werden muß, und zwar in Äquatorminuten. Im Vergleich mit der Plattkarte wachsen die Breitenparallele zu den Polen ständig an. Die Pole selbst können in der Mecartorkarte so nicht dargestellt werden, da die Bezugsbreite der Äquator ist und der sec φ für 90° unendlich ist. Die Karte ist deshalb nicht flächentreu. Für die Bedingung, daß die Positionen der Fixsterne in dieser Karte dargestellt werden sollen, und da in der sphärischen Astronomie die Sterne sowieso als Punkte am Himmel angenommen werden, ist somit diese Kartenprojektion u.a. eine gute Grundlage um Sternenwege und Schiffahrtswege im groben Überblick darzustellen. Sie ist winkeltreu und die Loxodrome (Kurse und Peilungen / Azimute) bildet sich als Gerade ab. Distanzen müssen entsprechend der Breite am linken oder rechten Kartenrand abgenommen und aneinander angekoppelt werden. Auch kann diese Karte für Ausschnitte kleinerer Weltgegenden dienen, wobei dann eine Bezugsbreite festzulegen ist.

Um so eine Karte zu zeichnen, muß man zuerst den Kartenmaßstab, die Karteneinheit und die Ausdehnung der Karte berechnen. Danach berechnet man die Abstände der Meridiane von einem Randmeridian und die Abstände der Breitenparallele von einem Randparallalel. Weiter werden zur Kontrolle die Abstände eines Ortes vom Randmeridian und vom Randbreitenparallel berechnet. Man erhält die Abstände der Breitenparallele auf der Mecartorkarte (unechter Zylinderentwurf), indem man jeden Breitengrad mit der Sekante der geographischen Breite ( 1: cos φ = Sekans φ) multipliziert und die gewonnenen Strecken addiert, bis man die gewünschte Breite erreicht hat. Um die Genauigkeit zu erhöhen, verwendet man statt Breitengrade die Breitenminuten. bzw. Breitensekunden.

Die Berechnung und Kontruktion soll nun an einem Beispiel erleutert werden.

Für das Gebiet zwischen $\varphi_1$ = 80° N, $\varphi_2$ = 80° S und $\lambda_1$ = 180° E, $\lambda_2$ = 180° W soll der Netzentwurf einer Seekarte (in Mercartorprojektion) gezeichnet werden. Die Bezugsbreite (hier Äquator) soll 250 mm lang sein, wobei in der Mitte der Nullmeridian liegt. Die Karte soll einen Maßstab von 1 **:** 100 000 000 haben. Meridiane und Breitenparallele sind in Abständen von zu je 30° einzuzeichnen. In den Netzentwurf sind die Positionen von Hawaii als Ort A $\varphi_1$ = 19° 30,0' N; $\lambda_1$ = 155° 30,0' W und die Position von Rapa Nui als Ort B $\varphi_2$ = 27° 00,0' S; $\lambda_2$ = 109° 18,0' W einzuzeichnen.

*Lösung:* Auf Grundlage des modifizierten internationalen Referenzellipsoids nach HAYFORD (ED 50) und mit den entsprechenden Meridionalanteilen werden zuerst die folgenden Berechnungen durchgeführt, dabei lauten die Ausgangswerte für das HAYFORDsche Rotationsellelipsoid (bekannt unter ED-50), wie folgt:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | = | 6378388, 000 m | große Halbachse der Erde |
| $b$ | = | 6356911, 946 m | kleine Halbachse der Erde |
| $\frac{a-b}{b}$ | = | $\frac{1}{297{,}00}$ | Abplattung |

Der Kartenmaßstabes (M)drückt das Verhältnis der Länge einer Linie in der Natur ($L_N$) zur Linie in der Karte ($L_K$) aus. Es gilt die Beziehung

$$M = 1 : (L_N : L_K) \tag{23}$$

Der Ausdruck ($L_N : L_K$) = $\mu$ wird als Maßstabzahl bezeichnet. Damit gilt

$$L_N = \mu\, L_K$$

Da in dem ausgesuchten Beispiel der Maßstab 1 **:** 200 000 000 beträgt, ist $\mu$ = 200 000 000
Zuerst muß man wissen, wie groß die Entfernung zweier Punkte in der Natur ist, wenn die Strecke zwischen diesen zwei Punkten in der Karte 10 mm beträgt.

$$L_N = 200\,000\,000 \times 10 \text{ mm}$$
$$L_N = 2^{09} \text{ mm}$$
$$\underline{\underline{L_N = 2000 \text{ km} = 1079,9 \text{ sm}}}$$

Auch sollte man wissen, wie groß die Kartenlänge einer Strecke ist, wenn die Naturlänge 1000 sm beträgt.

$$L_K = L_N : \mu$$
$$L_K = (1000 \text{ sm} \times 1852000 \text{ mm}) : 200\,000\,000$$
$$\underline{\underline{L_K = 9,26 \text{ mm}}}$$

Der Hauptmaßstab für das zu berechnende Kartennetz wird entweder auf den Äquator oder auf einen bestimmten Breitenparallel bezogen. Im Rechnungsbeispiel ist $\mu$ die Maßstabzahl für den Äquator, so ergibt sich die zugeordnete Karteneinheit K.

$K = (a \times \text{arc } 1') : \mu$ (24)

$K = (6378388 \text{ m} \times 0{,}000290888) : 200\,000\,000$

$K = 0{,}00000928 \text{ m}$

$\underline{\underline{K = 0{,}00928 \text{ mm}}}$

Die Karteneinheit ist damit die Strecke, die einer Bogenminute entspricht. Sie gilt für Netzentwürfe, die große Gebiete und den Äquator erfassen.. Bezieht man den Kartenmaßstab statt auf den Äquator, auf einen anderen Breitenparallel und die Maßstabzahl eben auf diese Breite (Bezugparallel), so ergibt sich die zugeordnete Karteneinheit $K_1$ entsprechend der Beziehung

$$K_1 = (N \cos \varphi_1 \text{ arc } 1') : \mu_1, \qquad (26)$$

wobei N der Querkrümmungshalbmesser ist. Für die große Halbachse a des Erdellipsoids in Formel (26) ist hier der Radius $r = N \cos \varphi_1$ des Bezugsparallels mit dem Erdellipsoid gleichzusetzen

Die Längenausdehnung der Karte ergibt sich nach der Beziehung

$x = K \times \Delta\lambda$ (27)

$x = 0{,}00928 \text{ mm} \times 21600'$ (aus $l = 2 \times 180°$ in nautische Minuten)

$\underline{\underline{x = 200{,}38 \text{ mm}}}$

die Breitenausdehnung nach der Beziehung

$y = K \times \Delta\phi$ (28)

$y = 0{,}00928 \text{ mm} \times 16750'$ (aus $b = 2 \times 80°$ in Meridionalteile)

$\underline{\underline{y = 155{,}39 \text{ mm}}}$

Dabei ist $\Delta\lambda$ der Längenunterschied zwischen den Randmeridianen der zu konstruierenden Karte (180° E bis 180° W) und $\Delta\phi$ der Unterschied zwischen den Meridionalteilen der Rand-Breitenparallele (80° N bis 80° S).

Die Abstände $\Delta x$ der einzubeziehenden Meridiane von einem Randmeridian ergeben sich dann nach der Beziehung

$\Delta x = K \times \Delta\lambda$ mit $l_n$ in nautische Minuten. (29)

Die Abstände $\Delta y$ der einzuzeichnenden Breitenparallele vom benachbarten Breitenparallel ergeben sich aus der Beziehung

$\Delta y = K \times \Delta\phi$ mit $\Delta\phi_n$ in Meridionalanteile. (30)

Dabei befindet sich der Koordinatenursprung auf $\varphi = 00°$, $\lambda = 000°$, so daß die errechneten Differenzwerte nach beiden Seiten auf der *x* Achse und auf der *y* Achse abtragen werden.

| $\Delta\lambda°$ | $\Delta\lambda'$ | $\Delta x$ |
|---|---|---|
| 000° | 000’ | 0, 00 mm |
| 030° | 1800’ | 16, 70 mm |
| 060° | 3600’ | 33, 41 mm |
| 090° | 5400’ | 50, 11 mm |
| 120° | 7200’ | 66, 82 mm |
| 150° | 9000’ | 83, 52 mm |
| 180° | 10800’ | 100, 22 mm |

| $\varphi$ | $\phi$ | $\Delta\phi$ |
|---|---|---|
| 00° N/S | 0, 0’ | 0, 0 mm |
| 10° N/S | 603, 1’ | 5, 60 mm |
| 20° N/S | 1225, 1’ | 11, 37 mm |
| 30° N/S | 1888, 4’ | 17, 52 mm |
| 40° N/S | 2622, 7’ | 24, 34 mm |
| 50° N/S | 3474, 5’ | 32, 24 mm |
| 60° N/S | 4527, 4’ | 42, 01 mm |
| 65° N/S | 5178, 8’ | 48, 06 mm |
| 70° N/S | 5965, 9’ | 55, 36 mm |
| 75° N/S | 6970, 3’ | 64, 68 mm |
| 80° N/S | 8375, 0’ | 77, 72 mm |

Die Eintragung eines Objektes mit den Koordinaten $\varphi_1$ und $\lambda_1$ in das Kartennetz erfolgt mit den Werten

$$\Delta x_1 = K_1 \times \Delta\lambda_1 \tag{31}$$
$$\Delta y_1 = K_1 \times \Delta\phi_1 \, , \tag{32}$$

wobei $\Delta\lambda_1$ und $\Delta\phi_1$ Längenunterschied bzw. vergrößerter Breitenunterschied zu den Berandungen des Kartennetzes sind. Zur Kontrolle kann zusätzlich der Abstand zu einem Eckpunkt des Kartennetzes berechnet werden:

$$e = \sqrt{\Delta x^2_1 + \Delta y^2_1} \, . \tag{33}$$