Das Inertialsystem Erde

Das geographische Koordinatensystem

Die Erde wird mit dem ruhenden Kugelintertial umgeben. Aus dem Kugelkoordinatennetz wird das geographische Koordinatennetz weiter entwickelt, welches im folgenden erläutert werden soll.

Soll ein Ort auf der Erdoberfläche definiert werden, bedarf es zweier Bezugslinien, auf die man die Lage des Ortes oder eines Punktes bezieht. Der erste Bezugskreis ist der Grundkreis. Er wird als *Äquator* (lat. Gleicher) bezeichnet und teilt die Erdkugel in eine nördliche und eine südliche Halbkugel. Die Großkreise des Kugelskoordinatensystems schneiden den Äquator senkrecht. Diese Großkreise werden als Meridiane (lat. *circulus meridianus,* Mittagskreis). bezeichnet. Von allen Meridianen ist der *Nullmeridian* als ein ausgezeichneter Großkreis hervorgehoben, der zusammen mit dem 180° Meridian die zweite Bezugsebene der Zählung des Richtungswinkels bildet. Auf diesen beiden Großkreisen baut sich das geographische Koordinatensystem auf. Die Breitenkreise verlaufen als Kleinkreise parallel zum Äquator (00°) und nehmen um den Kosinus der Breite zu den Polen hin ab, so daß sie an den Polen (90°) als Punkt erscheinen. Zum Nordpol hin spricht von nördlichen Breiten (N). und zum Südpol hin von südlichen Breiten (S). Die Meridiane oder Mittagskreise verbinden die Pole. Diese als Länge bezeichneten Großkreise zählen von 000° (Greenwicher Meridian) über 180° Ost (Ost) (engl. East) und bis 180° (West) oder in der rechtsorientierten Vollkreiszählung von 000° über 090°, 180°, 270° bis 360°. Der 180° Meridian wird gleichzeitig auch als Datumsgrenze bezeichnet. Die geographische Koordinaten (lat. Zugeordnete) eines Ortes bzw. eines Punktes P sind somit immer ein Längen- und ein Breitengrad. Das Grad in der 360° Einteilung ist als einzige Angabe von Koordinaten jedoch zu ungenau. Hier besteht die Teilung des Grades zu 1° = 60’ (nautische Minuten); 1’ = 60“ (nautische Sekunden) bzw. 1“ zu 60’“ (Meridiantertien), wobei 1’ auch einer (nautischen) Seemeile (1852 m) entspricht. Somit kann man jeden Ort der Erde einer genauen Koordinate zuordnen.

Die zwischen zwei Orten A und B gegebenenfalls vorhandene Differenz ist erstens der Breitenunterschied ($\Delta\varphi$), als das Bogenstück eines Meridians zwischen den Breitenparallelen dieser Orte ($\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A$) und zweitens der Längenunterschied ($\Delta\lambda$) zwischen diesen Orten, als das Bogenstück des Äquators oder der sphärische Winkel am Pol zwischen den Meridianen dieser Orte ($\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$).

Der Breitenunterschied erhält seine Bezeichnung Nord oder Süd nach der Richtung vom Abfahrtsort (A) (P_1 im ruhenden Kugelintertial) zum Bestimmungsort (B) (P_2 im ruhenden Kugelintertial). Der Längenunterschied erhält seine Bezeichnung Ost oder West ebenfalls nach der Richtung vom Abfahrtsort (A) zum Bestimmungsort (B).

Im Laufe der Geschichte der Navigation und der Erdvermessung wurde durch die Mathematik die metrische Länge eines Grades auf der Erdoberfläche festgelegt. Die Bogenminute stellt hierbei das Grundmaß dar. Allgemein wird die Länge einer Bogenminute für einen größten Kreis (Meridiane und Äquator) der Erdkugel definiert. Es ergibt sich dann die einfache Beziehung, daß sie der 21600. Teil des Erdumfangs ist. Damit wird beim Fahren auf einem Meridian oder dem Äquator mit jeder Seemeile ein Breiten- bzw. Längenunterschied von 1’ zurückgelegt.

Auf Grund von in den einzelnen Ländern unterschiedlich durchgeführten hydrographischen Vermessungen der Erde haben sich auch unterschiedliche Längen für eine Seemeile ergeben.

zum Beispiel:	Japan	mit 1853,18 m
	Dänemark	mit 1851,85 m

Portugal mit 1850,00 m

Zur Vereinheitlichung und für Vergleichszwecke wurde deshalb im Jahre 1928 vom Internationalen Hydrographischen Büro (Sitz in Paris) vorgeschlagen, die Länge einer Seemeile auf 1852,00 m zu setzen.

Da die Breitenparallele mit wachsender geographischer Breite ihren Umfang verringern, ist auf ihnen die Bogenminute nicht gleich lang. Dieser Unterschied wird durch den Begriff der Abweitung (*a*) berücksichtigt.

Die Abweitung (*a*) ist das zu einem Längenunterschied gehörende Bogenstück eines Breitenparallels, ausgedrückt in Seemeilen (sm).

$$a = l \; \cos \varphi \qquad (18)$$

$$l = a : \cos \varphi \qquad (19)$$

Der Breitenparallelbogen und Äquatorbogen verhalten sich zueinander wie ihre Radien.

Die folgende Tabelle gibt an, wieviel Seemeilen einem Längenunterschied von 1° (60’) auf einem Breitenparallel entsprechen.

Breitenparallel in Grad	1° Längenunterschied in sm
90°	0,0 sm
80°	10,4 sm
70°	20,5 sm
60°	29,9 sm
50°	38,5 sm
40°	45,8 sm
30°	31,8 sm
20°	56,3 sm
10°	58,9 sm
0°	60,0 sm

Die in geographischen Koordinaten ausgedrückten Punkte eines beliebigen sphärischen Dreiecks A, B, C nehmen im geographischen Koordinatesystem folgende Entsprechungen ein:

Punkt A Abfahrtsort in Koordinaten des geographischen Koordinatesystems

Punkt B Bestimmungsort in Koordinaten des geographischen Koordinatesystems

Punkt C Nord- oder Südpol des geographischen Koordinatesystems

Folgende Größen kennzeichnen somit das Inertialsystem *Erde*

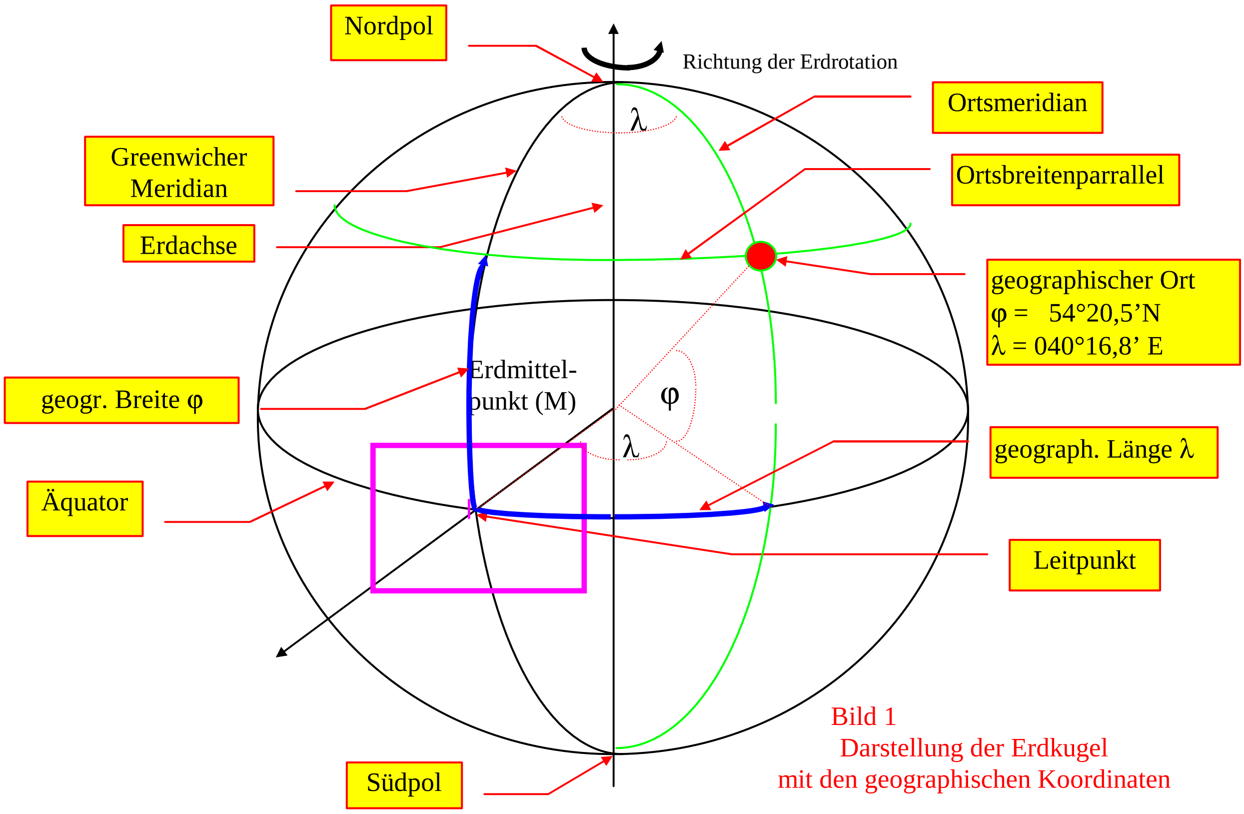


Bild 1
Darstellung der Erdkugel
mit den geographischen Koordinaten

Leitpunkt: Schnittpunkt der Grundkreise (des Greenwicher Meridians mit dem Äquator) und der Lotrechten (r) zum Erdmittelpunkt

Das Inertialsystem Erde ist somit ein räumliches kartesisches Koordinatensystem, der Übergang zu einem Polarkoordinatensystem wird gewährleistet, wenn der Koordinatenursprung im Erdmittelpunkt oder auf einem Pol bezogen wird. Als Raummaß für dieses Koordinatensystem gilt die international vereinbarte Länge der Seemeile mit 1852 Meter. So folgen diesem Maß nachfolgenden Entsprechungen:

1 Meridiantertie (''') =	0,5144	Meter
1 Bogensekunde ('') =	30,867	Meter
1 Bogenminute (') =	1852,00	Meter
1 Grad (°) =	111120,00	Meter
Erdumfang von 360° =	40003200,00	Meter

Da der Radius der volumengleichen Erdkugel 6371,221 km und demzufolge der Umfang 40031,562 km beträgt, das Maß der Seemeile jedoch einheitlich mit 40003,200 Meter festgelegt ist, ergibt sich ein Unterschied von 28,36 km. Da die Größenwerte der volumengleichen Kugel, genauso wie die Werte der auf der vereinbarten Seemeile festgelegten Werte nicht die tatsächlichen Größe der Erde widerspiegeln, macht es keinen Unterschied und entspricht es hinreichender Genauigkeit den einmal international festgelegten Wert von 1852 Meter als einheitliches Raummaß zu nutzen, wenn von der Erde als angenommene Kugel ausgegangen wird.

Der Erdellipsoid

Sollen erhöhte Genauigkeitsansprüche in der Navigation zum Tragen kommen, muß die angenommene Kugelgestalt durch eine wirklichkeitsgetreuere Form ersetzt werden.
Durch Vermessungen der Erde wurden Abweichungen des Erddrehkörpers von der Kugelform festgestellt. Benutzt man als ideale Oberfläche der Erde den ungestörten Meeresspiegel, ergibt sich der Erdkörper als ellipsoide Form. Eine genaue Erfassung ist zwar mit der heutigen Satellitentechnik aus dem erdnahen Kosmos heraus für die gesamte Erdoberfläche gegeben, kann jedoch aufgrund der ungleichen Dichte und Form der Erdkruste nicht als gesamtes, sondern nur in Teilen als tatsächliches Modell vereinheitlicht werden. Es muß somit ein Hilfskörper gegeben sein, der am nächsten diesem Geoid kommt. Die beste Approximierung erfolgt durch ein an den Erdpolen abgeplattetes Ellipsoid, der so konstruiert ist, daß das Zentrum des Erdellipsoids gleichzeitig der Massemittelpunkt der Erde ist und das Volumen dieses Erdellisoids dem Volumen der Erde entspricht. Die physische Erdachse soll dabei mit der ellipsoiden Achse zusammenfallen. Die Gesetze der Ellipse gestatten genauere Koordinatenberechnungen, als dies durch die mathematischen Beziehungen für die Kugel gegeben ist. So gilt für die Berechnung der numerischen Exentrizität ε einer Ellipse mit der halben Hauptachse a (Äquatorradius) und der halben Nebenachse b (halbe Erdachse) die Beziehung: $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.
Die Differenz zur Kugel wird durch die lineare Abplattung $\alpha' = a - b$ und die numerische Abplattung $\alpha = \frac{a-b}{a}$ ausgedrückt. Analog dazu muß zwischen der linearen Exzentrizität $e' = \sqrt{a^2 - b^2}$ und der numerischen Exzentrizität $e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$ unterschieden werden.
Zwischen e und a besteht die Beziehung: $e^2 = 2\,\alpha$.
Nun tritt an der Oberfläche eines ellipsoiden Körpers der Umstand auf, daß diese verschieden gekrümmt ist. So ist eine meridinale Krümmung und eine Querkrümmung als Krümmungshauptrichtung benannt.
Während der Krümmunghalbmesser einer Kugel wegen der Kugelsymetrie überall gleich ist, ändert sich der Meridiankrümmungshalbmesser (M) mit der geographischen Breite. Der Erdellipsoid ist an den Polen flach und in der Äquatorgegend am stärksten gekrümmt. Das kommt in der Werten der Abplattung zur Geltung.

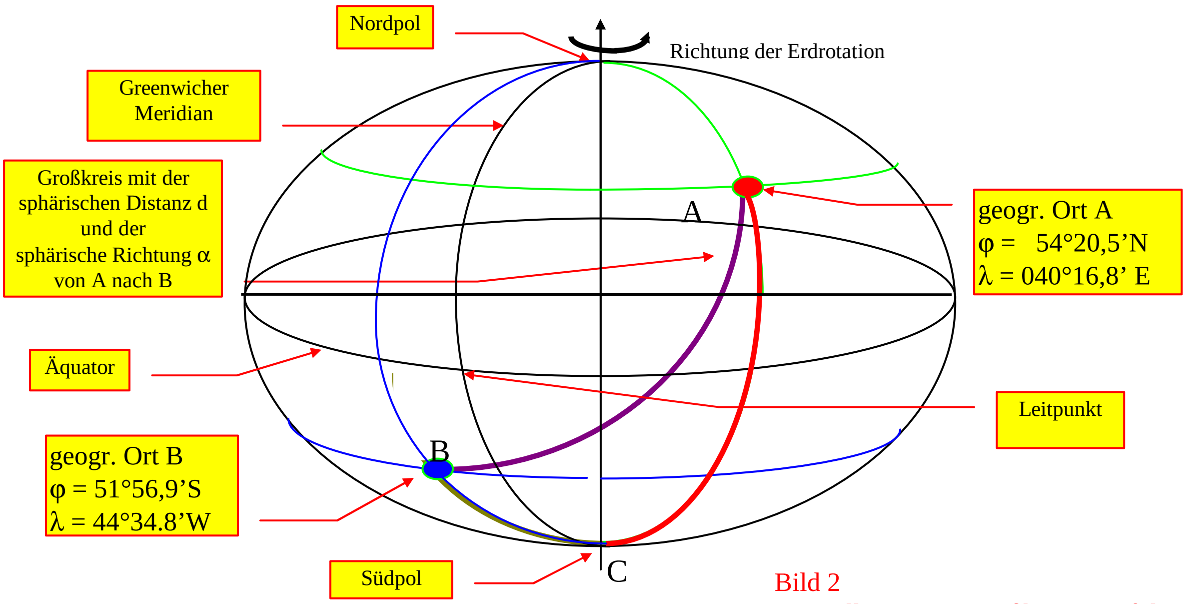


Bild 2
Darstellung eines Großkreises auf dem Erdellipsoid

Die z-Achse im geographischen Koordinatensystem ist der Erdradius der volumengleichen Kugel, jedoch mit der praktischen Einschränkung, daß die metrischen Angaben von Wasserständen oder von Höhen und Tiefenwerten des Wassers oder anderer Objekte entsprechend dem verzeichneten Seekartennull entsprechen und somit nicht auf den Erdmittelpunkt, sondern auf den Meeresgrund oder auf das Kartenniveau einer Seekarte bezogen sind. (Siehe Seevermessung und Gebrauch von Seekarten)

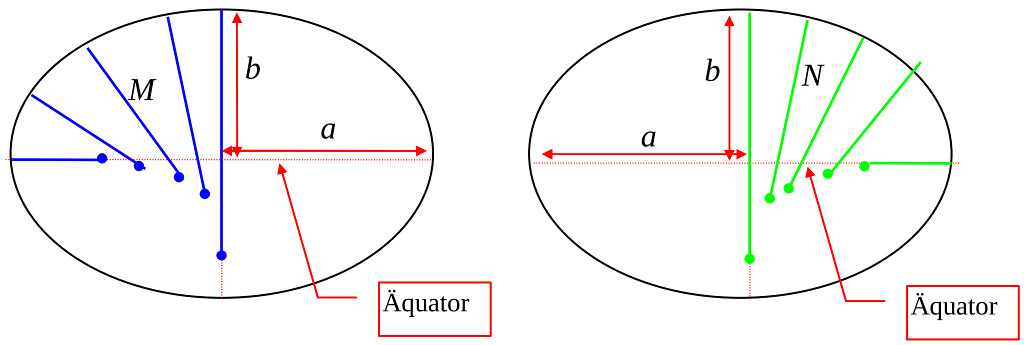
Die Größe der Erde nach dem internationalen Referenzellipsoid

Erdradius äquatorial..........................	a = 6378,168 km
Erdradius polar................................	b = 6356,777 km
Abplattung.......................................	$c = (a - b) : a = 1 : 297$
1° in Länge.......................................	111,418 km · cos φ – 0,094 km · cos 3φ
1° in Breite.......................................	111,137 km – 0,562 km · cos 2φ
Radius der volumengleichen Kugel.....	6371,221 km
Volumen..	$1083{,}320 \cdot 10^9$ km^3
Oberfläche..	$510{,}101 \cdot 10^6$ km^2

Soll der Krümmungshalbmesser berechnet werden, so muß der Radius des entsprechenden Punktes auf der Ellipsenoberfläche als Kreispunkt gesehen werden. Für den Krümmungshalbmesser der Meridianellipse M gilt: $M = \dfrac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin\varphi)^{\frac{2}{3}}}$ und für den Querkrümmungshalbmesser N gilt:

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

Die Berechnung ergibt entsprechend der unterschiedlichen Krümmung auch unterschiedliche lange Radiusstücke, die alle lotrecht zur Ellipsenoberfläche stehen. Die Krümmungshalbmesser M und N stehen senkrecht aufeinander, womit die Krümmungen auf dem Ellipsenkörper erfaßt sind. M steht senkrecht auf seinem entsprechenden Meridianstück, und *N* steht senkrecht zu der Meridianrichtung vom *M*. Das verhältnis von N und M ist eins. wenn der Körper eine Kugel ist. An den Erdpolen ist dieses Verhältnis eins. Wird ein ausgewähltes gebiet der Erde berechnet, so wird mit dem mitteren Krümmungshalbmesser R gerechnet. Um R zu erhalten, gilt: $R = \sqrt{MN}$. Entsprechend den verschiedenen Referenzellipsoiden der Gebiete der Erde gelten nun auch verschiedene Krümmungshalbmesser.



Meridiankrümmungshalbmesser und Querkrümmungshalbmesser

Die Meridiane auf der als Kugel angenommenden Erde werden hier zu Halbellipsen, während sich die Form der Breitenparallele nicht ändert. Entsprechend der Richtung des Radius des Krümmungshalbmessers gehen die Lotrechten nicht mehr durch den Erdmittelpunkt, sondern schneiden die Erdrotationsachse unterhalb oder oberhalb des Äquators. Demzufolge definiert sich die geozentrische Länge analog der geographischen Länge, für die Definition der geozentrischen Breite φ' kommt eine Differenz, die sich in der Breitenreduktion r = φ – φ' ausdrückt, zum Tragen. Diese wird in Bogensekunden durch die Formel $r = \dfrac{\alpha \sin 2\varphi}{arc1''}$ bestimmt. Wird die Länge einer Seemeile anstatt auf die Erdkugel auf das gültige Erdellipsoid bezogen, errechnet sich die Länge einer Bogenminute in Anwendung der Bogenmaßgleichung auf dem elliptischen Meridian Δ1' zu: $\Delta 1' = \dfrac{a(1-e^2)arc1'}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$ = 1852 – 9,4 cos 2φ.

Insgesamt ergeben sich folgende Werte für das internationale Refenzellepisoid:

1° in Länge	111,418 km · cos φ – 0,094 km · cos 3φ
1° in Breite	111,137 km – 0,562 km · cos 2φ

Da die Länge einer Bogenminute somit auf einem Erdellipsoid nicht einheitlich sein kann, an den Polen beträgt sie ca. 1842,9 m und am Äquator ca. 1861,6 m, wird die Seemeile entsprechender internationaler Vereinbarung mit 1852 m angewandt.