Die arabische Navigation

In der Analyse einer ganzheitlichen Navigation darf selbstverständlich die Arabische Seefahrt des Mittelalters nicht unerwähnt bleiben. Auch wenn es so scheinen mag, dass die wesentlichen Grundzüge der europäischen Navigation auf die Iberische Hochseefahrt zurückgreifen, so ist dass, was wir heute in der astronomischen und auch in der terrestrischen Navigation vorfinden unweigerlich mit der arabischen Seefahrt verbunden. Viele Sterne tragen heute noch arabische Namen. Begriffe wie Azimut, Alhidade, Nadir, Zenit u.a. sind arabischen Ursprungs. Es würde eine Lücke lassen, die hohen Leistungen der arabischen Seefahrer nicht zu analysieren und einzugliedern in die ganzheitliche Betrachtung des Systems Navigation.
Nicht von ungefähr trafen sich am 24. April 1498 der arabische Kapitän Ibn Majid und Vasco da Gama im ostafrikanischen Hafen Malindi (nördlich von Mombassa – Kenia-). Der Grund lag in der Überquerung des Indischen Ozeans. Kapitän Ibn Majid sollte Lotse sein für diese Ozeanüberquerung und er war es auch. Aber nicht nur Lotse war dieser Kapitän. Auf der Reiseroute nach Kalikut wurde unter Vasco da Gama durch eben diesen Kapitän arabische Navigation betrieben.
In Kenntnis und Ausnutzung des Monsunwindes, der von April bis Mai und von August bis September als Südwestmonsun im Golf von Oman ostwärst weht, während er von Oktober bis März als weitaus stärkerer Nordostmonsun im Golf von Oman westwärts weht und der dadurch beeinflusste Nord-Äquatorialstrom gelang die Beherrschung der Seewege im indischen Ozean. Während die Seefahrer dieser Zeit in Kenntnis dieser natürlichen Wechselspiele der Monsunwinde und in Kenntnis der Gezeiten in Abhängigkeit von den Mondzyklen mit dem Nordostmosun aus Maskat (Position: φ = 23° 36’ N; λ = 58° 32’ E) ausliefen, war ihnen nicht nur die Reisedauer der Hinreise von 4 Monaten bekannt. Durch die Wahl des Auslaufszeitpunktes war auch gleichzeitig der Einlaufzeitpunkt der Rückkehr festgelegt. Nicht nur die Malabarküste Westindiens, die Inseln der Nikobaren (Kole-rue Position: φ = 8° 13’ N; λ = 93° 08’ E) im Golf von Bengalen oder die Südspitze Indiens waren als Reiseziel ausgewählt, sondern auch die Inseln zwischen Singapur und Südchina kamen in Betracht. Schließlich konnte die Reise bis nach Kanton in China gehen. Den Sommer in China verbringend, liefen die Schiffe dann im Herbst wieder zurück in die arabische Heimat, den Südwestmonsun im Rücken. Nautische Tabelle, Küstenbeschreibungen und vieles mehr unterlag einer ständigen Korrektur und Verbesserung, so dass die praktische Navigation auf sicherer Basis stand. Die sogenannten „Rahmanis“ sind Beispiele für die Ausübung jener hohen Kunst der Nautik, enthielten sie doch nicht nur Zeichnungen der verschiedenen jahreszeitlichen bedingten Sonnenstände über den Daus, sondern auch Kompasszeichnungen mit einer zweiunddreißigteiligen Stricheinteilung der Kompassrose, die zur Richtungsanzeige der Hauptsterne genutzt wurden. Es bleibt anzunehmen, dass die arabischen Seefahrer den Unterschiede des Azimutes am Kompass zum Stundenwinkels eines Gestirns sehr wohl kannten. So gibt es kein Beispiel dafür, dass sie den Versuch unternahmen, mittels der Kompasspeilung die Uhrzeit herzuleiten, wie es die europäischen Seefahrer des 15. Jahrhunderts anfangs versuchten.

Wie lange schon in der arabischen Navigation die Anwendung des Nordsternes für die Breitenbestimmung verwendet wurde, lässt sich nicht mehr nachvollziehen. Es würde uns auch verwundert, wenn gerade die Araber diesen Glückstreffer der Astronomie nicht für ihre Navigationszwecke nutzen würden, taten es doch alle Kultur- und Naturvölker, für die der Nordstern sichtbar war und die sich mit den Himmelsbeobachtungen befassten, gleichzeitig und vollkommen unabhängig von einander. Da dieser Stern in unmittelbarer Nähe des Himmelspols steht und seine Stellung dort kaum verändert, ergab sich das Verfahren der Bestimmung der geographischen Breite nach diesem Stern fasst von selbst, zu dem dafür auch keinerlei Zeitgeräte, gar noch Tabellen notwendig sind. Die Polhöhe von Polaris ist (unter Abzug kleinerer Korrekturen) auch gleichzeitig die geographische Breite des Beobachtungsortes. Zum Einmessen der Polhöhe benutzen die arabischen Navigatoren zwei Verfahren, die nachfolgend etwas eingehender erläutert werden sollen.

Das erste Verfahren ist die Einmessung von Gestirnshöhen mit der Hand. Diese Methode benötigt keinerlei weitere Messgeräte und wurde in Ermangelung dieser schon vor tausend Jahren verwendet.

Hierbei wird die Höhe über dem Horizont in Fingerbreiten gemessen. Ein Höhenwinkel, der der Dicke eines ausgestreckten Fingers entsprach, wurde als ein isba, der von vier Fingern zusammen als ein dubban bezeichnet. Ein isba wurde zudem noch in acht zam unterteilt, wodurch der Höhenwinkel verfeinert angeben werden konnte. Wenn man der Fingerbreite ca. 1, 6° zugrunde legt, so entsprechen ca. 224 isba 360°. Selbstverständlich muss diese Messmethode aufgrund der Unterschiedlichkeit eines menschlichen Fingers als relativ ungenau eingeschätzt werden. Genauer war dann schon die zweite Methode der Höhenwinkelmessung. Die Ausführung dieser Methode gelang mit einem Brettchen, in dessen Mittelpunkt ein Loch eingelassen war. Das Brettchen wurde so senkrecht gehalten, dass es mit der Unterkante auf den sichtbaren Horizont zum Liegen kam, während im Loch das Gestirn (Polarstern) sichtbar sein musste. Je nach Höhe des Gestirns musste das Brettchen bald mehr bald weniger weit weg vom Auge des Beobachters gehalten werden.. Stand der Polarstern sehr hoch, musste das Brettchen natürlich sehr dicht zum Gesicht des Beobachters stehen. Mittels einer an der Unterseite des Brettchens befestigten Schnur, dessen loses Ende mit den Zähnen des Beobachters straff in der Waagerechten gehalten wurde, gelang die Bestimmung des Abstandes vom Gesicht zum Brettchen. Die Schnur war in Abständen durch Knoten markiert. Jeder Knoten verkörperte einen bestimmten Höhenwinkel zum Nordstern und damit eine bestimmte geographische Breite. Die geniale Eigenschaft dieser Schnur war, dass genau für einen Knoten auch die geographische Breite eines Ortes, einer Hafenstadt, einer Insel oder eines besonderen Landmarke stand. Diese mathematische Klügelei lässt auf den hohen mathematischen und astronomischen Wissensstand der arabischen Welt schließen. Im heutigen Jemen war das Kamal, so wird dieses Brettchen bezeichnet noch bis Mitte des 19. Jahrhunderts in Gebrauch. Als im 8. Jahrhundert dann die ersten Astrolabien in Gebrauch kamen, verbesserten sich die astronomische Beobachtung ganz erheblich. Aber nicht nur in Arabien findet man die Quellen jener arabischen Navigation. In China erwähnt ein Chronist, dass seit 671 u. Z. arabische Schiffe in China Handel treiben. Und schließlich wird sogar ein Name genannt. Um 750 n. d. Z. segelt ein Omani namens Abu Ubayda Abdullah bin al Quasim nach Guang Zhou, dem bekanntem Canton. Leider ist mehr nicht bekannt. Es war jene Zeit als Bagdad seine Blütezeit begann und zur bedeutendsten Handelsmetropole des Orients aufstrebte. Bagdad befand sich im Aufbau und binnen relativ kurzer Zeit einstand ein Kreuzungspunkt der Seeverbindungen zu China, zu Indien, zum Roten Meer und zur Küste Ostafrikas. Schließlich wurde 878 u. Z. das chinesische Canton in einen durch Rebellen verursachten Krieg verwickelt. Der Seehandel nach Arabien brach ab. Dafür entwickelte sich der arabische Handel nach Malaysia, Sumatra und nach Java noch intensiver. Wenn heute in Indonesien und Malaysia die islamische Kultur vertreten ist, so ist das ein bleibendes Zeugnis alter und älterer Handelsbeziehungen zwischen diesen Völkern und Erdteilen. Aber woher stammt so hervorragendes Wissen. Hier mag es genügen, auf zwei Quellen aufmerksam zu machen.

Al-Battarie (877 bis 918), ein arabischer Astronom schrieb:
„Durch die Wissenschaft von den Steren gelangt der Mensch zu dem Beweis der Einheit Gottes und zur der Erkenntnis der ungeheuren Größe, der höchsten Weisheit, der größten Macht der Vollendung seiner Tat.“
Und ein Zweites:

„ Und betrachtet ihr nicht den Himmel,
wie ER denselben gebaut hat!“

(Sure 88, 19)

Für die Ausübung der islamischen Religion war die Astronomie unentbehrliches Werkzeug. Sollten doch nicht nur jeder Muezzin in der Lage sein, nach dem Sonnenstand den Beginn der fünf täglichen Gebete festzulegen. Er musste auch nach den Mondzyklen Anfang und Ende des Fastenmonats Ramadan errechnen können. Dabei musste er den Anfang des Ramadans mit Zeitpunkt des Sonnenaufgangs und Ende mit Zeitpunkt des Sonnenuntergangs ankündigen können. Aber auch die Vorhersage von Sonnen- und Mondfinsternissen musste gelingen, da damit bestimmte religiöse Handlungen und die Einhaltung bestimmter Regeln verbunden sind. Vor allem aber muss ein Muezzin die Himmelsrichtung zu Mekka, den heiligem Ort ermitteln können, denn das tägliche Beten geschieht in diese Richtung. Astronomische Kenntnisse waren daher unentbehrlich.

Als Ptolemäus seinen Almagest, der alles damalige griechische Wissen zusammenfasste, schrieb und dieser die griechische Blütezeit überdauerte, war er nicht nur in Bibliotheken des Abendlandes, sondern auch im Morgenland zu finden. Doch während im Abendland dieses Wissen lange unkorrigiertes Dogma blieb, dessen Unfehlbarkeit die Kirche beschwor, war dieses Werk in der islamischen Welt nur Grundlage weiterer Arbeit und Verbesserung, Arabien erweiterte und korrigierte dieses Wissen lange bevor in Europa im 14. und 15. Jahrhundert damit begonnen wurde. Griechische Philosophie und babylonische Beobachtungsgabe, untermauert mit indischer Zahlenlogik ließen die islamischen Wissenschaften sich zu jeder Form entwickeln, die den Beweis und das Experiment kennt, die nicht glaubt, sondern untersucht. So musste sich diese Einstellung auch auf die Navigation durch die Weiten einer Wüste, ganz gleich, ob nun Wasser oder Sand auswirken.

Vor ca. 1000 Jahren hatte die arabische Navigation eine Methode entwickelt, die sich rein auf mathematische Berechnungen belief und mit Recht als einzigartig betrachtet werden kann. Dieser allein durch Berechnungen bestimmte Schiffsstandort nannte sich tirfa.

Bekannter Weise benutzen die Navigatoren eine Seekarte des indischen Ozeans, auf der die wichtigsten Häfen mit den Polhöhen zu Polaris und damit mit ihrer entsprechenden Breite eingetragen waren. Aber jene Karte besaßen ähnlich der Art der Polynesischen Navigation Sternkompassrosen, in denen jeweils zwei Peilungen für sechzehn Sterne angeben waren. Die erste Peilung bezog auf den Aufgang des Gestirns, während die zweite Peilung die Richtung des Untergang des gleichen Stern zeigte. Auch gab es eine Tabelle mit für die im Osten aufgehenden Gestirne und dessen Azimute von einem im Westen gelegen Abgangshafen aus zu den verschiedenen indischen Häfen.
Um nun den Standort und die entsprechenden Entfernungen für die Reiseverlauf zu berechnen, wurde ein sogenannter tirfa-Faktor benutzt. Dieser Faktor wurde aus dem Azimut des betreffendes Sternes gebildet. Es ist der reziproke Wert des Cosinus eines Azimutes. (1/cos) . Mit diesem Faktor und der Kenntnis von der geographischen Breite zweier Orte lässt sich mit den Winkelfunktionen eines ebenen Dreiecks die Entfernung zwischen diesen Orten berechnen. Die Entfernung zwischen zwei breitengeographisch benannten Orten musste selbstverständlich bekannt sein. Aber auch diese konnte berechnet werden.
Mittels heutigen astronomischen Kenntnissen soll einmal diese Art der nautischen Astronomie nachvollzogen werden.

Zuerst soll für den Indischen Ozean eine Sternenkompasskarte erstellt werden.
Folgende Orte wollen wir in die Berechnung einbeziehen:

Bestimmungshäfen:
Karāchi (Indien, Westküste) φ = 25° 01’ N; λ = 066° 48’ E
Bombay (Indien, Westküste) φ = 19° 05’ N; λ = 072° 42’ E
Cochin (Indien, Westküste) φ = 09° 57’ N; λ = 076° 09’ E
Male (Malediven) φ = 04° 10’ N; λ = 073° 29’ E
Kole-rue (Nikobaren –Inseln) φ = 08° 13’ N; λ = 093° 08’ E
Sri Javawardhenepura (Sri Lanka) φ = 06° 57’ N; λ = 079° 51’ E

Abgangshäfen:
Maskat (Oman) φ = 23° 36’ N; λ = 058° 32’ E
Mombasa (Kenia) φ = 03° 55’ S; λ = 039° 34’ E

Mit der Großkreisnavigation werden jetzt die Distanzen und Azimute von den Abgangshäfen zu den Bestimmungshäfen ermittelt.

Abgangshafen Maskat				
Bestimmungshafen	Δλ	Höhe	Distanz	Azimut
Karāchi	008° 16,0’ E	82° 20’ 08“	7° 39’ 52“ 459,865 sm	N 077° 39’ 53“ E 077,234°
Bombay	014° 10,0’ E	76° 03’ 44“	13° 56’ 16“ 836,272 sm	N 106° 21’ 05“ E 106,124°

Cochin	017° 37,0’ E			
Kole-rue	034° 36,0’ E	53° 29’ 28“	36° 30’ 32“ 2190,531 sm	N 109° 09’ 10“ E 109,053°
Sri Javawardhenepura	021° 19,0’ E	63° 37’ 00“	26° 23’ 00“ 2374,500 sm	N 125° 42’ 14“ E 125,252°
Abgangshafen Mombasa				
Bestimmungshafen	Δλ	Höhe	Distanz	Azimut
Karāchi	027° 14,0’ E	59° 07’ 11“	30° 52’ 49” 1852,817 sm	N 021° 37’ 36” E 021.626°
Bombay	033° 08,0’ E	50° 06’ 11“	39° 53’ 49” 2393,811 sm	N 053° 38’ 35” 053,643°
Male	033° 55,0’ E			
Kole-rue	053° 34,0’ E	35° 12’ 56”	54° 47’ 03” 3287,060 sm	N 077° 04’ 32” E 077,076°
Sri Javawardhenepura	040° 17,0’ E	48° 21’ 00”	41° 39’ 00” 2499,006 sm	N 074° 57’ 39” 074,961°

Entsprechend müssen jetzt die Sterne benannt werden, die im Aufgang gleich dem Kurs entsprechend über den Bestimmungshäfen sichtbar sind.
Aus dem Nautischen Jahrbuch wollen wir dazu einige Hauptsterne entnehmen und das Azimut bei dessen Aufgang berechnen. Dazu verwenden wir die mathematische Beziehung für den wahren Auf- bzw. Untergang eines Gestirn:

$$\cos Az = \sec\varphi \cdot \sin\delta$$

Stern	Sternwinkel	Deklination	Azimut für Maskat	Azimut für Mombasa
Capella	280° 50,5’	45° 59,7’ N	N 038° 17’ 09“ E	N 043° 51’ 57” E
Wega	080° 46,3’	38° 47,1’ N	N 046° 52’ 36“ E	N 051° 06’ 26” E
Castor	246° 21,8’	31° 53,3’ N	N 054° 47’ 48” E	N 058° 01’ 41” E
Arcturus	146° 05,6’	19° 11,3’ N	N 068° 58’ 53“ E	N 070° 45’ 54” E
Aldebaran	291° 01,8’	16° 30,4’ N	N 071° 56’ 14“ E	N 073° 27’ 13” E
Regulus	207° 55,0’	11° 58,2’ N	N 076° 55’ 08“ E	N 078° 00’ 06” E
Rigel	281° 22,5’	8° 12,3’ S	N 098° 57’ 35” E	N 098° 13’ 28” E
Sirius	258° 43,3’	16° 43,0’ S	N 108° 17’ 38“ E	N 106° 45’ 25“ E

Werte entsprechend dem Nautischen Jahrbuch 1999

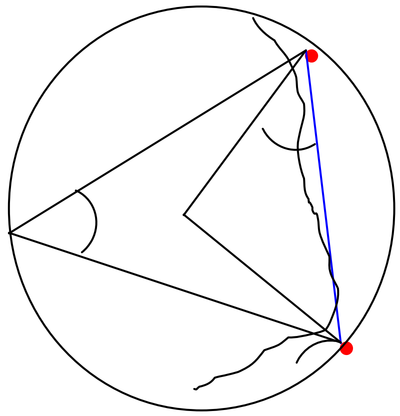
Leicht wird ersichtlich, dass einige Gestirnsazimute hervorragend zum Auslaufkurs nach einem bestimmten Hafen passen.

Bestimmungs-hafen	Azimute von Maskat		Azimut von Mombasa	
Karāchi	N 077° 39’ 53“ E	N 76° 55’ 08“ E Regulus	N 021° 37’ 36” E	

Kole-rue	N 109° 09’ 10“ E	N 108° 17’ 38“ E Sirius	N 077° 04’ 32” E	N 78° 00’ 06” E Regulus
Sri Javaward-henepura	N 125° 42’ 14“ E		N 074° 57’ 39” E	N 73° 27’ 13” E Aldebaran

Der tirfa-Faktor

Um die Anwendung des tirfa-Faktors richtig zu verstehen, wollen wir zuerst ein Beispiel aus der Küstennavigation untersuchen. Das Verfahren der horizontalen Winkelmessung zwischen zwei Objekten erfolgt durch die Bestimmung eines Peripheriewinkels über der Basislinie zweier Objekte.



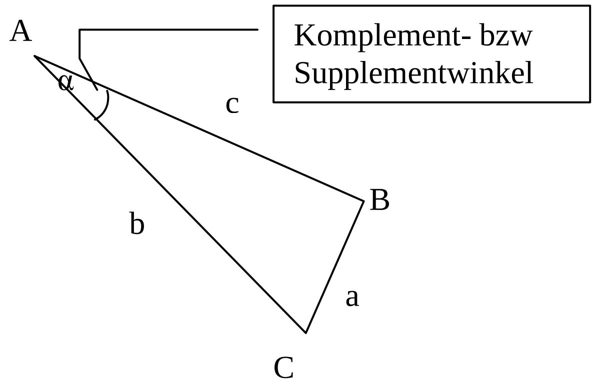
Die zu einem beobachteten Horizontalwinkel gehörende Standlinie ist der Teil eines Kreisbogens, der durch die Objekte A und C und durch den Beobachtungsort verläuft. Zur Bestimmung des Kreismittelpunktes werden die Komplementwinkel bei Hw > 90° bzw. die Supplementwinkel bei Hw < 90° errechnet und in Bezug auf die Basislinie in den Objekten A und B angetragen. Im Fall der Benutzung von Komplementwinkeln ist der Kreismittelpunkt zwischen der Basislinie und dem Schiffsort, während sich bei Benutzung der Supplementwinkel der Kreismittelpunkt auf der entgegengesetzten Seite der Basislinie befindet. Der Schnittpunkt ist der Kreismittelpunkt, dessen Radien zu den Objekten A und B und zum Beobachtungsort gleich sind. Wird auf der Mitte der Basislinie die Senkrechte errichtet, so ergibt sich ein Dreieck mit den Seiten a, b und c, wobei a die Strecke der halben Basislinie, b der Schenkel des Komplent- bzw. Supplementwinkel und c die auf der Basislinie errichtete Senkrechte ist. Es gilt dann die mathematische Beziehung:

$$\frac{r}{c} = \sec\alpha$$

$r = c \sec \alpha$

bzw.

$r = c \operatorname{cosec} Hw$



Beispiel:

gegeben: c = 8 sm

Hw = 50°

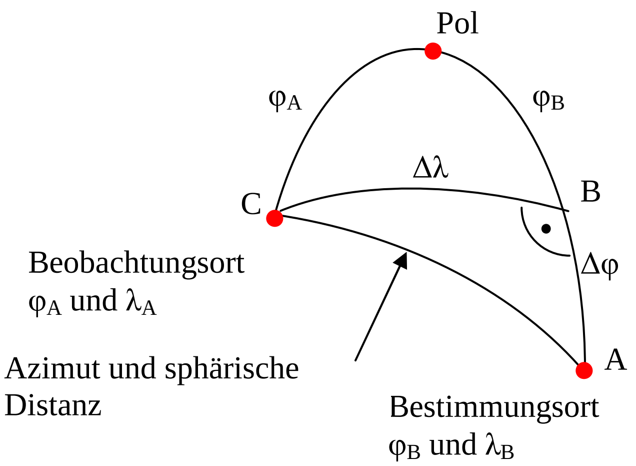
Gesucht: r

r = 8 sm x cosec 50°

r = 8 sm x 1,30541

r = 10,44 sm

Die mathematische Funktion r = c sec α beschreibt im weiteren Sinn den tirfa-Faktor.
Sind die Werte der geographischen Breiten zweier Orte und sec Az-Wert zu einem von beiden Orte bekannt, kann der Abstand zwischen diesen Orten berechnet werden.
Dabei gilt folgendes astronomisches Grunddreieck:



Durch Ermittlung des Breitenunterschiedes zwischen Beobachtungs- und Bestimmungsort ergibt sich der Scheitelpunkt B zum Errichten der Höhe auf dem Bogenstück φ_B und damit das neue sphärische Dreieck ABC

Somit ist so ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck entstanden.
Der tirfa-Faktor basiert nun auf die Anwendung der trigometrischen mathematischen Funktionen in der Ebene. Das bedeutet, dass die mathematische Beziehung

esm = $\Delta\varphi$ x sec Az

nur in Hinsicht auf eine loxodrome Berechnung anwendbar ist. Will der arabische Navigator nun einigermaßen genaue Berechnungsergebnisse für den Großkreis erhalten darf dieses auf die Ebene projekzierte astronomische Dreieck nicht all zu auffällig von dem orthodromen Grunddreieck abweichen.
Zwei Beispiele sollen dafür benannt werden, um diese Anschaulichkeit darzustellen.
Erstes Beispiel:
Auch wenn jetzt seit jenem historischen Treffen zwischen dem arabischen Kapitän Ibn Majid und Vasco da Gama, dem 24. April 1498 fünfhundert Jahre verflossen sind und der Sternenhimmel sich aufgrund der Präzessionsbewegung der Erde verschoben hat, so soll dennoch dieses Datum Grundlage sein, dass wir für das Erstellen eines Beispieles wählen wollen.

So gehen wir einmal von dem 24. April 1999 aus und versuchen an einem Beispiel die Überfahrt nach der arabischen Navigationsmethode nachzuvollziehen. Vasco da Gama trat am besagten 24. April 1498 von Melinde, heute Malindi in Kenia (Position: φA = 03° 05'S; λA = 040° 10' E)

die Überfahrt über den Indischen Ozean an und traf bereits am 20. Mai in Kalikut (Position: φB = 11° 15'N; λB = 075° 46' E) an der vorderindischen Südwestküste ein.

φA = 03° 05' S	λA = 040° 10' E
φB = 11° 15' N	λB = 075° 46' E
Δφ =14° 20' N	Δλ = 035° 36' E

Berechnung des wahren Kursdreieckes über Mittelbreite (loxodrom)

φm =04° 05' N	a = 035° 30' 35" E
α = N 68° 01' 08" E	rwK = 68,0°
d = 38° 29' 34"	dsm = 2309,567 sm

Berechnung des astronomischen Grunddreiecks (orthodrom)

hr = 51° 47' 51"	αAnfang = N 067° 23' 46" E
	αEnde = N 070° 02' 10" E
d = 38° 12' 09"	dsm = 2292,154 sm

In ca. 26 Tagen legte da Gama somit 2292,2 sm zurück. Das sind ca. 3,7 sm / h oder ca. 88,2 sm pro Tag.
Wir können nicht sagen, ob da Gama loxodrome oder orthodrome Kurse gesteuert hat. Wenn er während der Nacht Sterne als Kompass genutzt hat, muss von einem unbewussten Fahren auf der Orthodromen ausgegangen werden. Auch war sein Kompass von der Missweisung behaftet und es wurde zudem nicht nach Grad, sondern nach Stricheinteilung gesteuert. 68° entsprechen 6 Strich, also Ostnordostkurs. Ist er vorwiegend nach diesem Kurs fahren, hat er loxodromen Kurs gesteuert und hat (vergleiche die Berechnungen) 17,5 sm mehr zurückgelegt, als auf reinem orthodromen Kurs. Dieser Unterschied kann als unerheblich betrachtet werden. Erkennbar wird, dass die loxodrome Berechnung in Äquatornähe angewandt werden kann, weil hier die Abweitung (Längenunterschied in Seemeilen) verhältnismäßig gering ausfällt. Man darf nicht annehmen, dass die arabischen Navigatoren diesen Begriff der Abweitung beherrschten, denn die Länge einer Seemeile war aufgrund der fehlenden Erdkugelmaße nicht vermessen. Es war ein glücklicher Umstand, dass die arabische Navigation in Äquatornähe angewandt wurde, ansonsten hätte man den sogenannten tirfa-Faktor nicht nutzen können.
Nach der astronomischen Funktion $\cos Az = \sec\varphi \cdot \sin\delta$ berechnet sich der Aufgang für den Stern Acturus wie folgt:

cos Az = sec 03° 05'S x sin 19° 11,3' N
Deklination von Arcturus …19° 11,3' N
Breite von Malindi………….3° 05,0' S

cos Az = 0,32867434

Az = 70° 48' 42"

dsm = 14° 20' N x sec 70° 48' 42" Δφ =14° 20' N
dsm = 43° 12' 13" = 2592,22 sm

Der 24. April 1999 zeigt die Argumente für die Berechnung der Gestirnazimute und zeigt natürlich nicht den Deklinationswert für 1498, weshalb heute Arcturus in 70° und nicht in 68° beim Aufgang peilt.
Geht man von der Deklination des Arturus für 1999 von 19° 11,3' N aus und rechnet diesen Wert auf 501 Jahre zurück, so hat Arcturus im Jahr 1498 eine Deklination von 21° 47,4' besessen.

Im Januar 1982 besaß Arcturus einen Deklinationswert von 19° 16,5’ N
Im Januar 1999 besaß Arcturus einen Deklinationswert von 19° 11,2’ N
Das ist ein Unterschied in 17 Jahren von + 5,3’ und in einem Jahr von + 18,4“, so in 501 Jahren ein Unterschied von + 156,194’ = + 2° 36,2’. Diesen obigen Wert in die astronomische Funktion $\cos Az = \sec\varphi \cdot \sin\delta$ eingesetzt, ergibt einen Azimutwert von
cos Az = sec 03° 05’S x sin 21° 47,4’ N
= N 68° 10’ 36” E

Der tirfa Faktor des Stern Arcturus betrug (aus 1/ cos 68° 10’ 36“) somit 2,6900235
Die Entfernung konnte nun weiter berechnet werden:

e = Δφ x sec Az
e = 14° 20’ x sec 68° 10’ 36” (oder 860 sm x 2,69)
e = 38° 33’ 25”
esm = 2313,41 sm

Der Unterschied zur realen Großkreisdistanz beträgt hier nur 21,3 sm.
Aber nicht immer kann durch Anwendung der ebenen Trigonometrie die Berechnung so vorteilhaft verlaufen, wie das nun nachfolgende zweite Beispiel zeigt.
Wenn eine arabische Dau den Hafen von Maskat in Oman (φ = 23° 36’ N) verlässt, um nach Kole-rue auf den Nikobaren –Inseln (φ = 08° 13’ N) auszulaufen, so weiß der Kapitän, dass über dem Bestimmungshafen der Stern Sirius mit dem Azimut von 108° 17’ 38“ aufgeht. Die Entfernung von Maskat bis Kole-rue beträgt auf dem Großkreis 2190,5 sm, während der Anfangskurs 109° 09’ 10“ beträgt.
Die Berechnung der Entfernung mit dem tirfa-Faktor zeigt nun folgende Auswertung:

Maskat φA = 23° 36’ N
Kole-rue - φB = 08° 13’ N
= Δφ =15° 23’ S

e = 15° 23’ x sec 109° 09’ 10”
(wir setzen die Azimutpeilung gleich dem Großkreiskurs)
e = 2813,27 sm
Der Unterschied von 622,8 sm zur wirklichen Großkreisdistanz ist nun doch zu viel. Da die arabischen Nautiker jedoch auch hervorragend die Nordsternbreite in Zusammenhang mit den tirfa-Faktor zu nutzen in der Lage waren, kann es nicht verwundern, wenn sie für ihr Navigationsgebiet dem Indischen Ozean so gute Navigationsunterlagen besaßen.